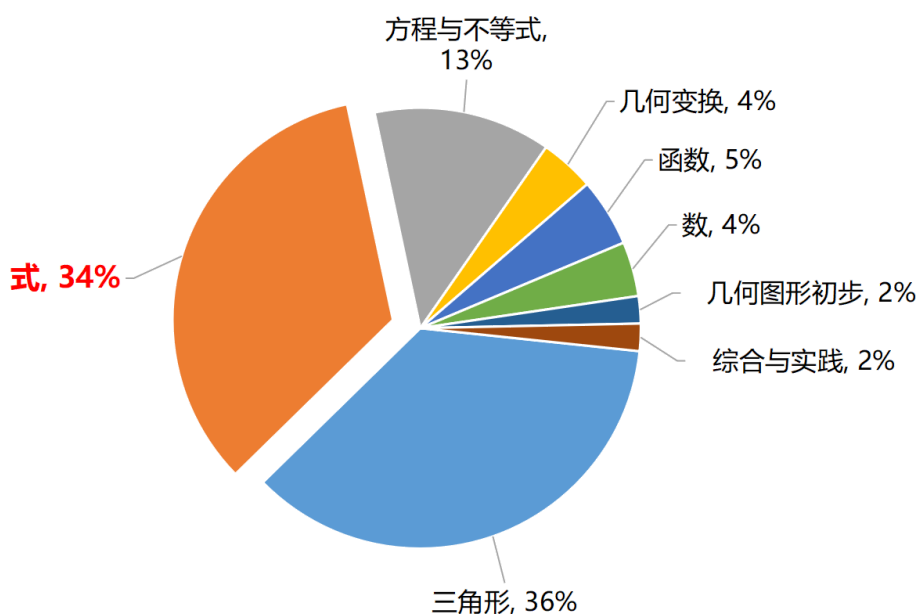


第1讲因式分解基本解法（一）

本模块属于人教版教材第十四章的重要内容，重点包括因式分解及其基本解法，本模块是前面整式乘法的后续知识，也为后面分式的学习和计算打下基础。本模块在期末中占比较大、重点考察计算，故需要学生熟练掌握其解法，并进一步探究其综合运用

本模块难度中等，适用于因式分解的初步学习，本模块分为 2 讲内容，包括提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法 4 中基本解法，配套练习与讲义内容完全对照，大量计算帮助学生巩固薄弱点和易错点。



知识点	难度	考频
因式分解的概念	★	低
提公因式法	★★	高
公式法	★★★	高
十字相乘法	★★★	高
分组分解法	★★★★★	低

一、因式分解

因式分解

概念：把一个多项式化为几个整式_____的形式，叫做把这个多项式_____。

因式分解与_____互为逆变形

【备注】 把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫做把这个多项式**因式分解**，也叫做将多项式分解因式，**因式分解与整式乘法互为逆变形**。

比如， $ma + mb + mc = m(a + b + c)$ 、 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ 等。

因式分解的要求：

- (1) 没有大括号和中括号。
- (2) 每个因式中不能含有同类项，如果有需要合并的同类项，合并后要注意能否再分解。
- (3) 单项式因式写在多项式因式前面。
- (4) 每个因式第一项系数一般不为负数。
- (5) 相同的因式写成幂的形式。

🔗 举个“栗”子

栗子1

1. 下列各式从左到右的变形中，是因式分解的是（ ）。

A. $a^2 + 1 = a(a + \frac{1}{a})$

B. $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

C. $a^2 + a - 5 = (a - 2)(a + 3) + 1$

D. $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

【备注】 考察因式分解的概念辨析，一定要注意整式范围内

【答案】 D

【解析】 A 选项：没把一个多项式转化成几个整式积的形式，故不符合题意，

B 选项：是整式的乘法，故不符合题意；

C 选项：没把一个多项式转化成几个整式积的形式，故不符合题意；

D 选项：把一个多项式转化成几个整式积的形式，故符合题意。

故选 D。

二、提公因式法

提公因式法

对于 $m(a + b + c) = ma + mb + mc$ ，其中 m 可以代表单项式，也可以代表多项式，它是多项式中各项都含有的_____，称为_____。

一般地，如果多项式的各项有_____，可以把这个_____提取出来，多项式写成公因式与另一个因式的_____的形式，这种分解因式的方法叫做_____。

【备注】1. 对于 $m(a + b + c) = ma + mb + mc$ ，其中 m 可以代表单项式，也可以代表多项式，它是多项式中各项都含有的**因式**，称为**公因式**。

确定公因式需**五看**

看**系数**：若各项系数都是整数，应提取各项系数的最大公因数；

看**字母**：公因式的字母是各项相同的字母；

看**字母的指数**：各相同字母的指数取指数最低的；

看**整体**：若多项式中含有相同的多项式，应将其看成整体，不要拆开；

看**首项符号**：若多项式中首项符号是“-”，则公因式的符号一般为负。

2. 一般地，如果多项式的各项有**公因式**，可以把这个**公因式**提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的**乘积**的形式，这种分解因式的方法叫做**提公因式法**。

🧠 举个“栗”子

栗子2

2. 多项式 $12ab^3 + 8a^3b$ 的各项公因式是 ()。

A. ab

B. $2ab$

C. $4ab$

D. $4ab^2$

【备注】注意数字和字母都要考虑到

【答案】C

【解析】 $12ab^3 + 8a^3b = 4ab(3b^2 + 2a^2)$ ，
则 $4ab$ 是公因式。

故选C.

【标注】【知识点】公因式

3. 在多项式 $-12ab^3c - 8a^3b$ 中应提取的公因式是().

A. $4ab^2$

B. $-4abc$

C. $-4ab^2$

D. $-4ab$

【备注】注意系数为负数时，公因式中也要有负号

【答案】D

【解析】 $-12ab^3c - 8a^3b$ 中的公因式是 $-4ab$ ，故选D.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】公因式

栗子3

【知识点拨】公因式为单项式

4. 分解因式： $x^2 - 5x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】比较基础，直接计算

【答案】 $x(x - 5)$

【解析】解： $x^2 - 5x = x(x - 5)$.

故答案为： $x(x - 5)$.

【标注】【知识点】利用提公因式法因式分解

5. 分解因式： $8a^3b^2 + 12ab^3c$.

【备注】比较基础，注意系数和字母

【答案】 $4ab^2(2a^2 + 3bc)$.

【解析】 $8a^3b^2 + 12ab^3c$,
 $= 4ab^2(2a^2 + 3bc)$.

【标注】【知识点】利用提公因式法因式分解

6. 分解因式： $-14abc - 7ab + 49ab^2c$.

【备注】易错题，注意系数为负，变号问题

【答案】 $-7ab(2c + 1 - 7bc)$.

【解析】 $-7ab(2c + 1 - 7bc)$.

【标注】【知识点】利用提公因式法因式分解

栗子4

【知识点拨】公因式为多项式

7. 因式分解： $3a(x - y) - (x - y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】公因式为 $(x - y)$ ，无需变形

【答案】 $(x - y)(3a - 1)$

【标注】【知识点】提公因式法

8. 分解因式： $m(m - n)^5 + n(n - m)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】需要对式子变形，再找公因式

【答案】 $(m - n)^6$

【解析】 $m(m - n)^5 + n(n - m)^5$,
 $= m(m - n)^5 - n(m - n)^5$,
 $= (m - n)^5(m - n)$,
 $= (m - n)^6$,

【标注】【题型】题型：提公因式法

9. 分解因式： $n^2(m - 2) - n(2 - m)$.

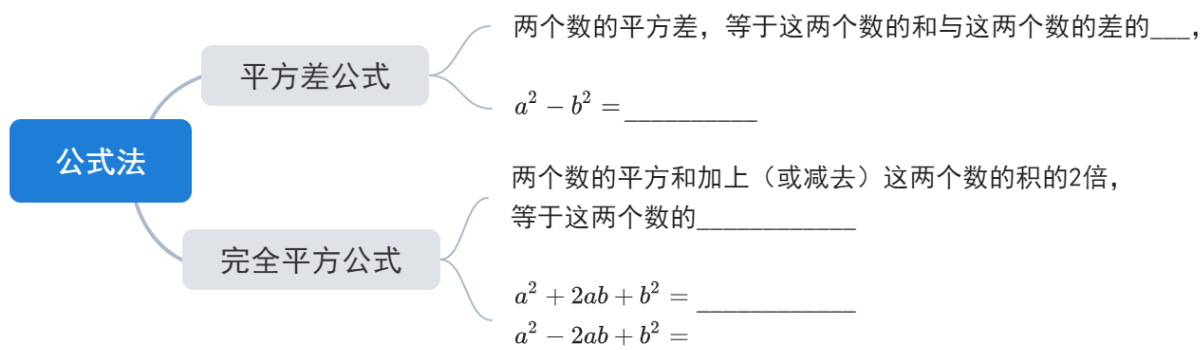
【备注】先变形，再用提公因式法，注意是否分解彻底

【答案】 $n(m - 2)(n + 1)$.

【解析】 $n^2(m-2) - n(2-m)$,
 $= n^2(m-2) + n(m-2)$,
 $= n(m-2)(n+1)$.

【标注】【知识点】提公因式法

三、公式法



【备注】1.平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$,
 两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积 .

【注意】用平方差公式做分解：

- ①要做分解的式子是二次二项式，且这两项符号相反；
- ②要做分解的式子的每一项都可以写成某个整式的平方；
- ③分解完的因式分别是这两个整式的和与差 .

2.完全平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,
 两个数平方和加上（或减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或差）的平方 .

【注意】用完全平方公式做分解：

- ①要做分解的式子是二次三项式，且其中首尾两项可以写成某个整式的平方且符号相同；
- ②要做分解的式子的中间项可以写成上面两个整式的乘积的 2 倍；
- ③分解完的因式是这两个整式的和或差（符号由中间项的符号决定） .

1. 平方差公式

🗣️ 举个“栗”子

📊 栗子5

10. 下列多项式中能用平方差公式分解因式的是（ ） .

- A. $a^2 + (-b)^2$ B. $5m^2 - 20mn$ C. $-x^2 - y^2$ D. $-x^2 + 9$

【备注】利用概念进行判断，与乘法公式类似

【答案】D

【解析】A、 $a^2 + (-b)^2$ 符号相同,不能用平方差公式分解因式，故A选项错误．

B、 $5m^2 - 20mn$ 两项不都是平方项,不能用平方差公式分解因式，故B选项错误．

C、 $-x^2 - y^2$ 符号相同,不能用平方差公式分解因式，故C选项错误．

D、 $-x^2 + 9 = -x^2 + 3^2$,两项符号相反,能用平方差公式分解因式，故D选项正确．

故选：D．

【标注】【知识点】利用平方差公式因式分解

11. 分解因式： $9 - x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【备注】数字与字母问题

【答案】 $(3 + x)(3 - x)$

【解析】 $9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$ ．

【标注】【知识点】利用平方差公式因式分解

12. 分解因式： $a^2 - 4b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【备注】字母与字母问题

【答案】 $(a + 2b)(a - 2b)$

【解析】 $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2 = (a + 2b)(a - 2b)$ ，

故答案为： $(a + 2b)(a - 2b)$ ．

【标注】【知识点】利用平方差公式因式分解

13. 分解因式

(1) $(x - y)^2 - (3x + y)^2$ ．

【备注】多项式与多项式，注意进一步运算

【答案】(1) $-8x(x + y)$ ．

【解析】(1) $(x - y)^2 - (3x + y)^2$

$$\begin{aligned}
 &= (x - y + 3x + y)(x - y - 3x - y) \\
 &= -8x(x + y) .
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用平方差公式因式分解

栗子6

【知识点拨】提公因式法与平方差公式结合，注意一定要分解彻底

14. 因式分解 .

$$(1) a^3b - ab^3 .$$

【备注】公因式为单项式

【答案】(1) $ab(a + b)(a - b)$.

【解析】(1) $a^3b - ab^3$
 $= ab(a^2 - b^2)$
 $= ab(a + b)(a - b) .$

【标注】【知识点】提公因式+平方差

15. 因式分解： $9a^2(x - y) + 4b^2(y - x)$.

【备注】公因式为多项式

【答案】 $(x - y)(3a + 2b)(3a - 2b)$.

【解析】原式 $= 9a^2(x - y) - 4b^2(x - y)$,
 $= (x - y)(9a^2 - 4b^2)$,
 $= (x - y)(3a + 2b)(3a - 2b) .$

【标注】【知识点】提公因式+平方差

2. 完全平方公式

👤 举个“栗”子

栗子7

16. 下列能用完全平方公式因式分解的是 () .

- A. $x^2 + 2xy - y^2$ B. $-xy + y^2$ C. $x^2 - 2xy + y^2$ D. $x^2 - 4xy + 2y^2$

【备注】利用概念进行判断，与乘法公式类似

【答案】C

【解析】只有C项符合两数的平方和减这两个数积的二倍.

【标注】【知识点】利用完全平方公式因式分解

17. 分解因式： $4x^2 - 4x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【备注】直接利用公式求解

【答案】 $(2x - 1)^2$

【解析】 $x^2 - 4x + 4 = (2x - 1)^2$.

【标注】【知识点】利用完全平方公式因式分解

18. 将下列各式因式分解：

(1) $(a + 2b)^2 + 2(a + 2b - 1) + 3$.

【备注】把 $a+2b$ 看成整体进行整理，再利用公式分解

【答案】(1) $(a + 2b + 1)^2$.

【解析】 $(1) (a + 2b)^2 + 2(a + 2b - 1) + 3$
 $= (a + 2b)^2 + 2(a + 2b) + 1$
 $= (a + 2b + 1)^2$.

【标注】【知识点】提公因式+完全平方

栗子8

【知识点拨】提公因式法与完全平方公式结合，注意一定要分解彻底

19. 因式分解 .

(1) $3ax^2 + 6axy + 3ay^2$.

【备注】公因式为单项式

【答案】(1) $3a(x+y)^2$.

【解析】(1) 原式 $= 3a(x^2 + 2xy + y^2) = 3a(x+y)^2$.

【标注】【知识点】提公因式+完全平方

20. 因式分解： $c(a-b) - 2(a-b)^2c + (a-b)^3c$.

【备注】公因式为多项式

【答案】 $c(a-b)(a-b-1)^2$.

【解析】 $c(a-b) - 2(a-b)^2c + (a-b)^3c$
 $= c(a-b)[1 - 2(a-b) + (a-b)^2]$
 $= c(a-b)(a-b-1)^2$.

【标注】【知识点】提公因式+完全平方

3. 乘法公式综合

 举个“栗”子

 栗子9

21. 因式分解： $(a^2 + 4)^2 - 16a^2$.

【备注】先利用平方差公式，再利用完全平方公式

【答案】 $(a-2)^2(a+2)^2$.

【解析】 $(a^2 + 4)^2 - 16a^2$
 $= (a^2 + 4 + 4a)(a^2 + 4 - 4a)$
 $= (a-2)^2(a+2)^2$.

【标注】【知识点】公式法综合应用

22. 因式分解：

(1) $(y^2 - 1)^2 + 6(1 - y^2) + 9$.

【备注】先利用完全平方公式，再利用平方差公式，注意最后利用积的乘方

【答案】 (1) $(y+2)^2(y-2)^2$.

【解析】 (1) $(y^2-1)^2+6(1-y^2)+9$,
 $= (y^2-1)^2-6(y^2-1)+9$,
 $= (y^2-1-3)^2$,
 $= (y+2)^2(y-2)^2$.

【标注】【知识点】公式法综合应用